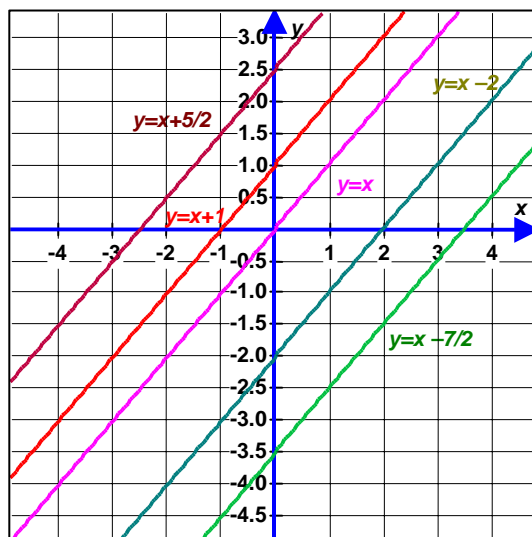


5.3 ECUACIONES DE LA FORMA $y = mx + b$

Las expresiones de la forma $y = mx + b$ con $m, b \in \mathbb{R}$ deben guardar similitud con las ecuaciones de la forma $y = mx$ estudiadas en la sección anterior. Cabe preguntar: ¿Qué incidencia tiene el real b ?

Con la ayuda visual que proporciona la representación gráfica, se iniciará el estudio con las ecuaciones de rectas que presentan la forma $y = x + b$.



- Todas tienen pendiente positiva.
- La razón de los desplazamientos entre dos puntos que pertenecen a una misma recta es la misma para todas las rectas, lo que indica que tienen la misma pendiente y por lo tanto se dice que son **paralelas**.
- Sólo $y = x$ pasa por el origen.
- Las rectas con $b \neq 0$ cortan al eje x y al eje y en puntos distintos.
- El corte con el eje y coincide con el valor de b .
- Las rectas con $b > 0$, cortan al eje y en su parte positiva. Cada recta es una traslación de b unidades hacia arriba de la recta $y = x$.
- Las rectas con $b < 0$, cortan al eje y en su parte negativa. Cada recta es una traslación de b unidades hacia abajo de la recta $y = x$.



De la misma forma, estudiando las ecuaciones de la forma $y = -x + b$ puede extraerse la siguiente información:

- Todas tienen pendiente negativa.
- La razón de los desplazamientos entre dos puntos que pertenecen a una misma recta es la misma para todas las rectas, lo que indica que tienen la misma pendiente y por lo tanto se dice que son **paralelas**.

Ejemplo 8

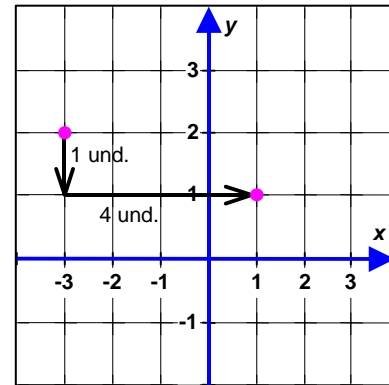
Hallar la ecuación de la recta que pasa por los siguientes puntos: (1,1) y (-3,2).

Pendiente $m = \frac{D.V.}{D.H.} = \frac{1}{4}$ negativa.

La ecuación debe ser de la forma:

$$y = -\frac{1}{4}x + b$$

Intercepto y :



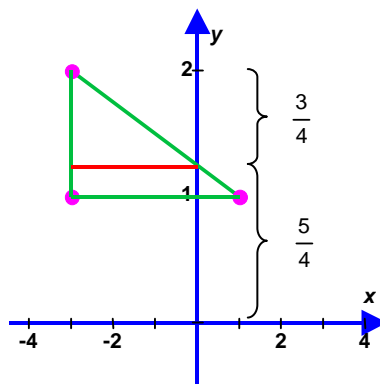
Es claro que el método de los desplazamientos aunque es bastante práctico en muchas ocasiones, no siempre permiten llegar fácilmente a la solución. En ocasiones es necesario recurrir al uso de herramientas geométricas o al método algebraico para resolver este tipo de situaciones: Cómo proceder?

Mediante el uso de herramientas de la Geometría, es muy útil establecer *semejanza de triángulos*, y hacer uso de las proporciones así:

Si para llegar del punto : (-3,2) al punto (1,1) se realiza un desplazamiento de 4 unidades hacia la derecha, para llegar del mismo punto (-3,2) hasta el eje y se deben avanzar 3 unidades en el mismo sentido. Para conservar la misma proporción, cuántas unidades es necesario desplazar hacia abajo?

$$m = -\frac{1}{4} = -\frac{?}{3}$$

Efectivamente: es necesario bajar $\frac{3}{4}$ de unidad, lo que significa que se cruza el eje y por el punto $\frac{5}{4}$ ya que $2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$.



Conocido el valor del intercepto y la ecuación de la recta es $y = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}$

El intercepto y también se puede obtener algebraicamente dado que se conocen dos puntos de la recta. Ambos deben cumplir con la ecuación, por lo cual cualquiera de ellos puede reemplazarse en la expresión:

$$y = -\frac{1}{4}x + b$$

$$1 = -\frac{1}{4}(1) + b$$

$$\frac{5}{4} = b$$

Ahora sí, puede concluirse que la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1,1)$ y $(-3,2)$ es:

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$



Ejemplo 9

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(3,4)$ y por $(1,1)$.

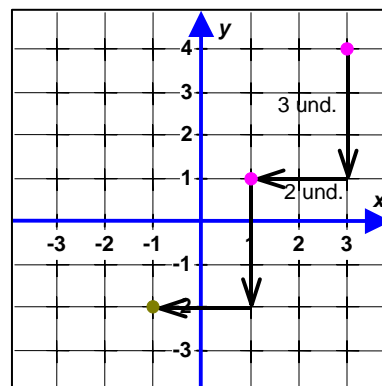
Pendiente: $m = \frac{D.V.}{D.H.} = \frac{3}{2}$ positiva.

Conocida la pendiente, se establece la razón entre los desplazamientos vertical y horizontal desde un punto conocido hasta el punto que coincide con el eje y :

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{1}$$

Esto significa que al desplazarse una unidad a la izquierda desde el punto $(1,1)$, se debe desplazar $\frac{3}{2}$ de unidad para llegar al intercepto y . De esta forma, la

ecuación determinada es: $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$



Ejemplo 10

Qué características tendrá una recta de la forma $y = mx + b$, con $m = 0$ y $b \neq 0$?

En el ejemplo 4, se analizó la recta $y = mx$, con $m = 0$, y se encontró que correspondía a una recta sobre el eje de las x . Si b hace que la recta se traslade verticalmente, para este caso, la recta horizontal, se trasladará b unidades hacia arriba si b es positivo, o b unidades hacia abajo, si b es negativo.

Por lo tanto se puede concluir que la recta es paralela al eje x y con intercepto y en b . La expresión algebraica de la recta es $y = b$



Ejemplo 11

Dada la representación gráfica del siguiente conjunto de rectas, encontrar la ecuación de cada una de ellas y resaltar sus características comunes:

Para la recta y_1 :

$$m = \frac{D.V.}{D.H.} = \frac{3}{1} = 3 \text{ y } b = -2 \Rightarrow y_1 = 3x - 2$$

Para la recta y_2 :

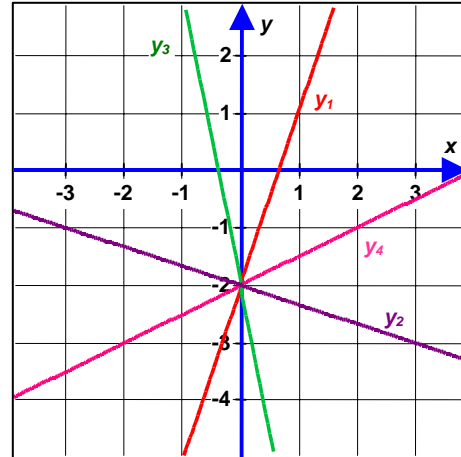
$$m = \frac{D.V.}{D.H.} = -\frac{1}{3} \text{ y } b = -2 \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{3}x - 2$$

Para la recta y_3 :

$$m = \frac{D.V.}{D.H.} = -\frac{5}{1} = -5 \text{ y } b = -2 \Rightarrow y_3 = -5x - 2$$

Para la recta y_4 :

$$m = \frac{D.V.}{D.H.} = \frac{1}{2} \text{ y } b = -2 \Rightarrow y_4 = \frac{1}{2}x - 2$$



Si bien las rectas tienen diferentes pendientes, todas tienen el mismo intercepto y . Es decir, el punto $(0, -2)$ es *común* para las cuatro rectas.



Hasta el momento se han estudiado rectas que comparten las mismas características como la de tener la misma pendiente o el mismo intercepto y . En general cualquier conjunto de rectas que tengan una característica en común se conoce con el nombre de **familia de rectas**.

Ejercicios 5.2



Sea D la recta con ecuación $y = -3x + 5$. Encontrar la ecuación de las siguientes rectas y graficarlas en un plano cartesiano.

1. La recta paralela a D que pasa por el punto $(2, 0)$.
2. La traslación 2 unidades arriba de la recta D .
3. La traslación 3 unidades a la izquierda de la recta D .



Encontrar la ecuación de las rectas para cada uno de los siguientes ejercicios:

4. La recta pasa por el punto $(1, 2)$ y tiene pendiente $-\frac{3}{4}$. Cuáles son las coordenadas del corte con el eje x ? Cuáles son las coordenadas del punto de corte con el eje y ?
5. La recta pasa por el punto $(-2, 4)$ y por el punto al que se llega al desplazarse 3 unidades a la derecha y 5 unidades hacia abajo.

6. La recta corta al eje x en -2 y al eje y en 3 .
7. La recta tiene pendiente $\frac{2}{7}$ y que cruza al eje x en -5 .
8. La recta une los puntos $P(3,-5)$ y $Q(4,7)$
9. La recta que pasa por $P(3,-2)$ y es paralela a la recta $2x + 3y = 5$.



Encontrar la pendiente de las rectas que cumplan con las condiciones dadas:

10. La recta que pasa por los siguientes puntos:
 - a. $(1,5), (4,2)$
 - b. $(-2,3), (1,0)$
 - c. $(2,6), (0,0)$
 - d. $(-4,5), (0,0)$
11. La ecuación de la recta es la siguiente:
 - a. $4x - 3y + 7 = 0$
 - b. $y = -x - 1$



Realizar los siguientes ejercicios:

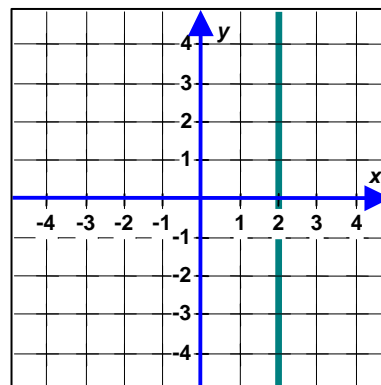
12. Encontrar las coordenadas de tres puntos que se encuentre sobre la recta $3x - 2y + 1 = 0$
13. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(-3,3)$ y que sea:
 - a. Paralela a la recta con ecuación $y = 2x + 5$
 - b. Paralela a la recta que pasa por los puntos $(-1,2)$ y $(3,-1)$

5.4 RECTAS VERTICALES


En la sección 6.1. se presentaron los diferentes tipos de recta que se pueden encontrar. Los dos primeros corresponden a expresiones de la forma $y = mx + b$. La tercera, es una recta de la forma $y = b$. La cuarta recta, ¿qué expresión algebraica la representará?

Si se pretende desplazarse desde un punto sobre la recta a otro cualquiera ubicado a d unidades sobre la recta, se tendrá:

$$\frac{D.V.}{D.H.} = \frac{d}{0}, \text{ razón no definida. (Ver sección 1.8)}$$



Puede decirse entonces que la pendiente **no está definida** para este tipo de rectas.

	<p>La pendiente de una recta vertical es indefinida ó no esta definida</p>	<p>Hay muchos otros autores que dicen que la pendiente de una recta vertical es indeterminada, por lo tanto se puede utilizar este término.</p>
---	---	--

Sin embargo, la característica general de todos los puntos que se ubican sobre la recta son puntos cuya abscisa siempre es 2. Es decir, sus coordenadas son de la forma $(2,y)$. Esto nos permite afirmar que x es igual a 2 para todo valor de y , que escrito en términos de ecuación, es:

$$x = 2$$

En general, toda recta paralela al eje y que corta al eje x en un punto c , es de la forma

$$x = c$$

Si $c = 0$, la recta coincide con el eje y .

Ejercicios 5.3



Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,3)$ y que:

1. Es paralela al eje de las x .
2. Es paralela al eje de las y .



Decir si es falso o verdadero.:

3. La recta $x = 5$ tiene un único corte con el eje y .
4. La ecuación $y = 0$ es la ecuación para el eje y .
5. El punto $(2,3)$ está sobre la recta $x = 2$.
6. El eje y se encuentra incluido en la región que contiene las rectas cuya pendiente es mayor a 3.

5.5 FUNCIÓN LINEAL

En las secciones 5.2 a 5.3 se estudiaron las características de las rectas que tienen la forma $y = mx + b$, y en todas ellas se observó que:

- Para todo valor de x existe uno y sólo un valor correspondiente en y . Se dice que una expresión que cumple con esta característica, es una **función** y en este caso, por tener como representación gráfica una recta, recibe el nombre de **función lineal**.

Formalmente en matemáticas, el concepto de **lineal** tiene un significado mucho más amplio, pero no será tratado en este curso pues será objeto de estudio en cursos posteriores.

La expresión $y = mx + b$, puede escribirse también de la forma $f(x) = mx + b$, dada la condición de función, en donde los valores de y dependen del valor de x .

	$f(x) =$ se lee “ <i>f</i> de <i>x</i> es igual a” ✓	$f(x) =$ se lee “ <i>f</i> , factor de <i>x</i> , es igual a” ✗
---	---	--

A este concepto se encuentran asociados otros conceptos:

Dominio: Conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x para que la función esté definida.

Codominio: Conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente y .

Imagen: Es el valor que toma la función $f(x)$ para un valor x del dominio.

Rango: Es el conjunto de imágenes de la función. También es conocido como **recorrido**.

- En una función de la forma $f(x) = mx + b$, puede suceder que a mayor valor de x el valor de y **augmente**, **disminuya** o se mantenga **constante**. Estas situaciones dan origen a los siguientes conceptos:

Para cualquier par de puntos x_1 y x_2 que pertenecen al dominio de la función:

- ➔ Si $x_1 < x_2$, y $f(x_1) < f(x_2)$, se dice que la función es **creciente**.
- ➔ Si $x_1 < x_2$, y $f(x_1) > f(x_2)$, se dice que la función es **decreciente**.
- ➔ Si $x_1 \neq x_2$, y $f(x_1) = f(x_2)$, se dice que la función es **constante**.

- Una función es **uno a uno** si a cada elemento del rango le corresponde *uno y sólo un* elemento del dominio, lo que formalmente se escribe:

Para cualquier par de puntos x_1 y x_2 que pertenecen al dominio de la función, si $x_1 \neq x_2$, y $f(x_1) \neq f(x_2)$, se dice que la función es **uno a uno ó inyectiva**.

Ejemplo 12

Sea $f(x) = \frac{2}{3}x - 5$. Determinar: $f(3)$, $f\left(\frac{2}{3}\right)$, $f(-2,3)$, $f(x+h)$.

Dado que $f(x) = \frac{2}{3}x - 5 \Rightarrow f(3) = \frac{2}{3}(3) - 5 = 2 - 5 = -3$

Para dar respuesta a $f\left(\frac{2}{3}\right)$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right) - 5 = \frac{4}{9} - 5 = -\frac{41}{9}$

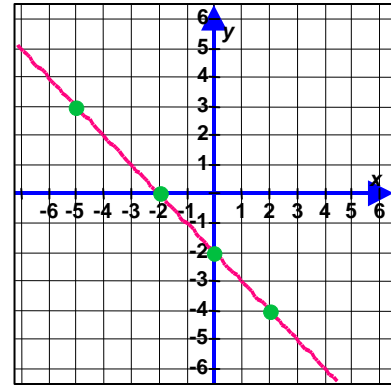
Para, $f(-2,3)$, $f(-2,3) = \frac{2}{3}(-2,3) - 5 = -\frac{4,6}{3} - 5 = -\frac{19,6}{3}$

Por último $f(x+h) = \frac{2}{3}(x+h) - 5 = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}h - 5$



Ejemplo 13

La siguiente gráfica representa una función. Los puntos de la gráfica tienen coordenadas de la forma $(x, f(x))$. A partir de ella, encontrar los valores de:



1. $f(2)$
2. $f(0)$
3. $f(-2)$
4. $f(x) = -5$
5. $f(x) = 3$
6. $f(x) = 0$

Para los numerales 1, 2 y 3, se busca el punto sobre la recta dada cuyas abscisas coincidan con 2, 0 y -2 respectivamente, y a partir de ellos se lee el valor de su ordenada.

Verbalmente equivale a preguntar: ¿Cuál es la imagen de la función en $x = 2$, $x = 0$ ó $x = -2$, respectivamente?

Por lo tanto $f(2) = -4$, $f(0) = -2$, $f(-2) = 0$

El enunciado de los numerales 4, 5 y 6 es equivalente a preguntar: ¿Cuáles son los valores de x , cuyas imágenes son respectivamente: -5, 3 ó 0? Para ello se deben ubicar sobre la recta los puntos cuya ordenada sea -5, 3 ó 0 y desde éstos se lee la abscisa correspondiente a cada uno de ellos.

De donde se obtiene $f(3) = -5$, $f(-5) = 3$, $f(-2) = 0$



Ejemplo 14

Dada $g(x) = \frac{x-3}{2}$, determinar si es función lineal.

Para saber si $g(x)$ es función lineal, debe determinarse si cumple con ser de la forma $g(x) = mx + b$:

$$g(x) = \frac{x-3}{2} \Leftrightarrow g(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

De esta forma, $g(x)$ es una función lineal con $m = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{3}{2}$



Ejemplo 15

Determinar dominio y rango para la función $h(x) = -3x + 5$.

Para determinar el dominio, es necesario encontrar los valores que puede tomar la variable x .

Como se ha convenido, mientras no se diga lo contrario, x es un número real. En este caso, no se genera ningún tipo de indeterminación como las mencionadas en capítulo 1 para $h(x)$. Por consiguiente, el dominio lo constituye el conjunto de los números reales.

Sabiendo que para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \in \mathbb{R}$, el rango es el conjunto de los reales.



Ejemplo 16

Determinar dominio y rango para la función $g(x) = 6$.

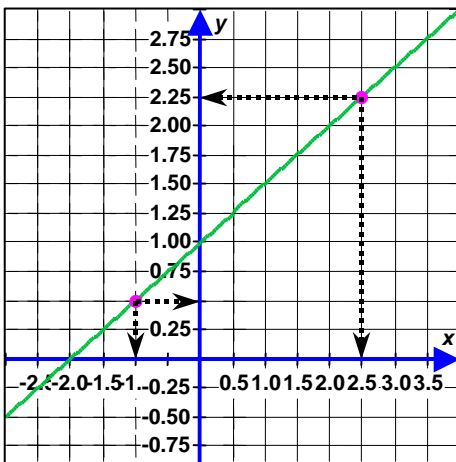
La variable no tiene restricción alguna, lo que significa que puede tomar cualquier valor real. El dominio de la función es entonces el conjunto de los números reales.

El rango de la función corresponde a aquellos valores que toma la variable y . En este caso, para cualquier valor que tome x , y siempre será 6. Por lo tanto, el rango de la función es: $\{6\}$



Ejemplo 17

Determinar si las funciones $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$ y $h(x) = -4x - 2$ son crecientes, decrecientes o constantes.



Para la primera función dada, $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$, se pueden tomar dos puntos arbitrarios sobre la recta, por ejemplo, $M = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$, y $A = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$, y analizar:

Como $-1 < \frac{5}{2}$, es $g(-1) < g\left(\frac{5}{2}\right)$?

Viendo que efectivamente $\frac{1}{2} < \frac{9}{4}$, puede asegurarse que la función es *creciente*.

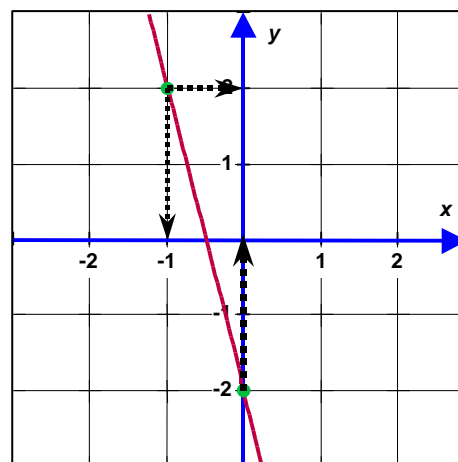
Se continúa el mismo análisis para la segunda función: $h(x) = -4x - 2$

Si los puntos $P = (-1, 2)$ y $S = (0, -2)$ pertenecen a la recta, se pregunta:

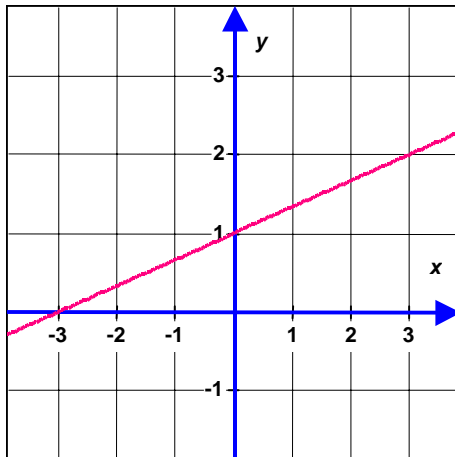
Dado que $-1 < 0$:

Es $h(-1)$ menor, mayor o igual a $h(0)$?

Como se puede ver, $h(-1) > h(0)$, por lo cual, la función es *decreciente*.



Ejemplo 18



Sea la recta $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$:

1. ¿Para qué valores de x es $f(x) = 0$?
2. ¿Para qué valores de x es $f(x) > 0$?
3. ¿Para qué valores de x es $f(x) > 1$?

La primera pregunta lleva a encontrar el punto de corte con el eje x .

En la gráfica puede verse claramente que corresponde al punto $x = -3$. Pero si se requiere exactitud, se recurre al álgebra:

$$0 = \frac{1}{3}x + 1 \Leftrightarrow x = -3$$

La segunda pregunta, puede responderse si se determina para qué valores de x , la recta está por encima del eje x .

Observando la representación gráfica, se encuentra que corresponde al intervalo $(-3; \infty)$.

Existe un procedimiento algebraico que permita llegar a la misma respuesta?

Efectivamente, como se vio en la sección 3.9, se establece una inecuación de primer grado en una variable:

$$\frac{1}{3}x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -3$$

Finalmente queda una pregunta por responder: ¿Para qué valores de x , $f(x) > 1$? Para resolverla, puede seguirse un procedimiento gráfico o un procedimiento algebraico:

Así como para dar respuesta a la pregunta 2 se buscaron los valores de x , para los cuales la recta está por encima del eje x , dado que para cualquier punto de la recta sobre este eje su ordenada es mayor que 0, en este caso se deben buscar los valores de x , para los que se tiene que la ordenada es mayor que 1.

A partir de la gráfica se puede concluir que los valores de x que satisfacen $f(x) > 1$ son $x \in (0, \infty)$.

El procedimiento algebraico que permite solucionar el problema es:

$$\frac{1}{3}x + 1 > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$



Dada una función de la forma $y = f(x) = mx + b$, cuya representación es una recta, en términos generales puede presentar cambios si alguno de los elementos que la determinan – su pendiente o su intercepto– es modificado, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 19

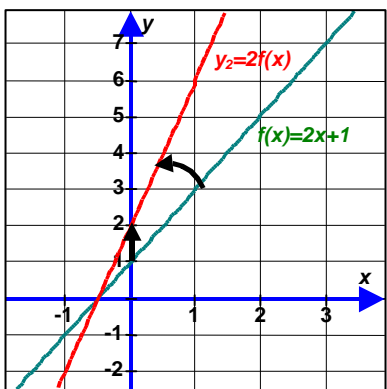
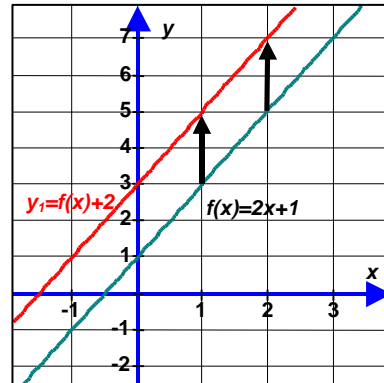
Sea la función $f(x) = 2x + 1$. Determinar los cambios en el plano cartesiano que pueden ocurrir cuando:

1. Se suma 2 a la función.

Algebraicamente, significa que:

$$f(x) + 2 = (2x + 1) + 2 = 2x + 3$$

Gráficamente, se traduce en una traslación vertical hacia arriba. Puede relacionarse el signo positivo del 2, con el sentido del eje. Si tuviera signo negativo, la traslación sería en el sentido contrario del mismo.



2. La función se multiplica por 2

De manera algebraica se expresa como:

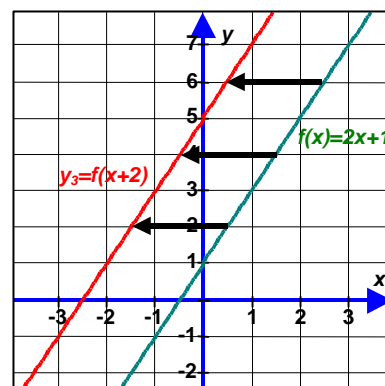
$$2f(x) = 2(2x + 1) = 4x + 2$$

lo que en la gráfica representa una traslación del intercepto y hasta 2 y una rotación de la recta debida al cambio de pendiente.

3. A la variable x se le suma 2 unidades.

Aunque gráficamente puede entenderse como una traslación vertical de 4 unidades hacia arriba, es preciso notar que en realidad lo que ha ocurrido es un desplazamiento horizontal de dos unidades hacia la izquierda. Si se ubica el intercepto y , se aprecia inmediatamente dicho desplazamiento. El manejo algebraico permite encontrar la razón de esta nueva gráfica:

$$f(x + 2) = 2(x + 2) + 1 = 2x + 5$$



Ejercicios 5.4



Cuáles de las siguientes expresiones representan una función lineal?

1. $y = -2x + 3$ 2. $y = 4$ 3. $x = 5$ 4. $y = x + \frac{1}{2}$
 5. $y = x^2 - 2$ 6. $y = \frac{x-3}{2}$ 7. $y = \frac{x+2}{x-5}$



Encontrar el valor de cada función dado el valor de x :

8. $y = 7x - 2$, $x = 3$, $x = -2$ 9. $y = -3x - 4$, $x = \frac{4}{5}$, $x = -\frac{2}{3}$
 10. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$, $x = -2$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{2}{3}$ 11. $g(x) = -0,3x + 2$, $x = -0,05$, $x = 0,03$



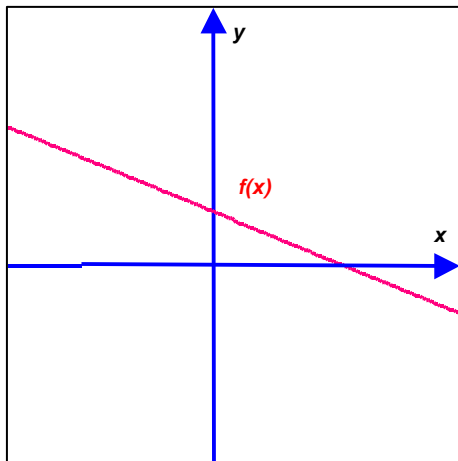
Hacer la gráfica de las siguientes funciones y determinar: dominio, rango, comportamiento (creciente o decreciente), puntos de corte con el eje x y con el eje y , y determinar para qué valores es $f(x) > 0$ y en dónde es $f(x) < 0$.

12. $h(x) = -\frac{3}{5}x - \frac{2}{7}$ 13. $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$
 14. $g(x) = \frac{x-3}{2}$ 15. $\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}y + 2$
 16. $2x + 3y = 10$

17. Halle la función lineal $f(x)$ tal que $f(1) = -4$ y $f(0) = 2$



Utilizando la siguiente gráfica²:



18. Encontrar la gráfica de la función $y_1 = 3f(x)$
 19. Dibujar la gráfica de la función $y_2 = -f(x)$
 20. Si para $f(x)$ el punto de corte en y es 2 y el punto de corte en x es 5, dibujar la gráfica de $y_3 = f(x) + 2$
 21. Determinar los puntos (x, y) del plano que cumple $y_4 = f(x) - 1$
 22. Determinar los puntos (x, y) del plano que cumple $y_5 = f(x - 2)$
 23. Determinar en la gráfica los valores de x para los cuales $f(x) < 0$
 24. Si $-2 < x < 1$, qué valores toma $f(x)$. Señalar los puntos sobre la gráfica.

² Adaptado de GÓMEZ, Pedro, et, al. Situaciones problemáticas de precálculo. pag. 50